

Интернет-олимпиада МФТИ
при поддержке компании Яндекс
2010 год

Третий тур

1. Скорость камня, брошенного под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту, была минимальна через 1 с после броска. Найдите дальность полёта. Принять $g = 10 \text{ м/с}^2$. Точки бросания и падения находятся на одном горизонтальном уровне. Ответ выразите в метрах.

Ответ: 20 м.

Решение: Скорость камня минимальна на максимальной высоте, где $v_y = 0$. Отсюда начальная вертикальная скорость равна $v_{0y} = gt = 10 \text{ м/с}$. Т.к. $\alpha = 45^\circ$, то $v_{0x} = v_{0y} = 10 \text{ м/с}$. Дальность: $L = v_{0x} \cdot 2t = 20 \text{ м}$.

2. При подведении 600 Дж теплоты к смеси гелия и азота при постоянном объёме смесь нагревается на 15 К, а если то же количество тепла подвести к тому же количеству той же смеси при постоянном давлении, температура смеси повысится на 10 К. Найдите отношение числа молекул азота к числу молекул гелия в смеси.

Ответ: 1.

Решение: Теплоёмкости всей смеси при постоянном объёме и давлении равны соответственно:

$$C_v = \frac{600 \text{ Дж}}{15 \text{ К}} = 40 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}, \quad C_p = \frac{600 \text{ Дж}}{10 \text{ К}} = 60 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}, \quad C_p - C_v = 20 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Т.к. отношение $\frac{C_p}{C_p - C_v} = 2$ не зависит от количества вещества и для одного моля любого идеального газа $c_p - c_v = R$, молярная теплоёмкость смеси при постоянном объёме $c_v = 2R$.

Пусть на одну молекулу гелия в смеси приходится x молекул азота. Тогда в одном моле смеси $\frac{1}{1+x}$ молей гелия и $\frac{x}{1+x}$ молей азота. Внутренняя энергия моля смеси равна

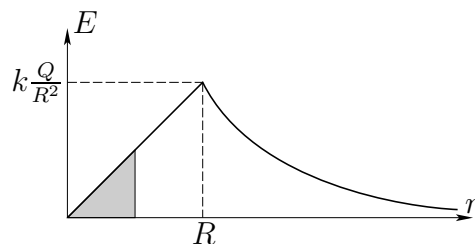
$$U = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{3}{2}RT + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{5}{2}RT = \frac{3+5x}{2(1+x)}RT,$$

откуда находим $c_v = \frac{U}{T} = \frac{3+5x}{2(1+x)}R$. Решив уравнение $\frac{3+5x}{2(1+x)} = 2$, получим: $x = 1$.

3. Шар радиуса R заряжен равномерно по объёму. Потенциал центра шара (относительно бесконечности) равен 120 В. Найдите потенциал на расстоянии $R/2$ от центра шара. Ответ выразите в вольтах.

Ответ: 110 В.

Решение: Как известно, напряжённость поля равномерно заряженной сферы внутри неё равна нулю, а снаружи такая же, как если бы весь заряд сферы находился в её центре. Разбив мысленно шар на тонкие сферические слои, из принципа суперпозиции получим, что зависимость напряжённости поля шара с зарядом Q от расстояния r до его центра имеет вид, показанный на рисунке:



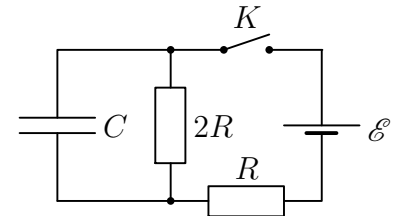
$$E(r) = k \frac{Q}{r^2} \quad \text{при} \quad r > R, \quad E = k \frac{Q}{R^3} r \quad \text{при} \quad r < R.$$

Потенциал в центре шара равен площади под всем графиком. Площадь от 0 до R находится как площадь треугольника и равна $\frac{1}{2} \cdot R \cdot k \frac{Q}{R^2} = k \frac{Q}{2R}$. Площадь от R до бесконечности равна $k \frac{Q}{R}$,

т.к. в этой области поле шара совпадает с полем точечного заряда, для потенциала которого есть готовая формула. Итого, потенциал в центре получается $\varphi(0) = \frac{3kQ}{2R}$, что по условию равно 120 В. Потенциал на расстоянии $R/2$ от центра шара меньше чем в центре на площадь закрашенного на рисунке треугольника, которая в 4 раза меньше уже найденной площади от 0 до R :

$$\varphi(R/2) = \varphi(0) - \frac{1}{4} \cdot \frac{kQ}{2R} = \frac{3kQ}{2R} - \frac{kQ}{8R} = \frac{11kQ}{8R} = \frac{11}{12}\varphi(0) = 110 \text{ В.}$$

4. В электрической цепи, изображённой на рисунке, все элементы можно считать идеальными. В некоторый момент после замыкания ключа тепловые мощности, выделяющиеся на резисторах R и $2R$, равны 9 Вт и 2 Вт соответственно. С какой скоростью в этот момент растёт энергия конденсатора? Ответ выразите в ваттах.



Ответ: 4 Вт.

Решение: Сначала, пользуясь формулой $P = I^2R$, находим, что в рассматриваемый момент времени ток в R в три раза больше тока в $2R$. Тогда ток через конденсатор в два раза больше тока в $2R$, а т.к. напряжения на C и $2R$ равны, то их мощности относятся как токи.

5. Оптическая система, состоящая из расположенных на общей оптической оси на расстоянии 10 см друг от друга собирающей линзы с фокусным расстоянием 15 см и рассеивающей линзы с фокусным расстоянием 5 см, создаёт изображение предмета, расположенного на некотором расстоянии перед собирающей линзой. Во сколько раз изменится размер изображения, если линзы поменять местами?

Ответ: 9.

Решение: Фокусы линз совпадают, поэтому параллельный оптической оси луч после прохождения системы останется параллельным, а из подобия получаем, что расстояние до оси уменьшилось в $F_1/F_2 = 3$ раза. Отсюда следует, что увеличение системы не зависит от расстояния до предмета и равно $1/3$. Если линзы поменять местами, то аналогично получаем, что увеличение равно 3.