

**Интернет-олимпиада МФТИ
при поддержке компании Яндекс
2010 год**

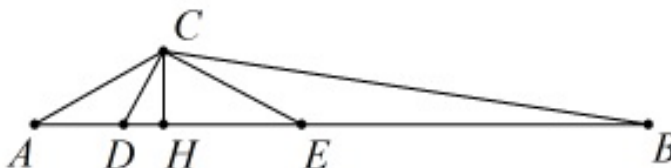
Первый тур

1. На стороне AB треугольника ABC , длина которого $4\sqrt{3}$, отмечены точки D и E . Найдите площадь треугольника ABC , если $AD = 1$, $DE = 2$, $\angle ACD = 30^\circ$, $\angle ACE = 120^\circ$.

Ответ. $S = 3$.

Решение. Из теоремы синусов для треугольников ADC и AEC имеем

$$\frac{CD}{\sin \angle A} = \frac{AD}{\sin \angle ACD}, \quad \frac{CE}{\sin \angle A} = \frac{AE}{\sin \angle ACE}.$$



Откуда получаем

$$\frac{CD \cdot \sin 30^\circ}{AD} = \frac{CE \cdot \sin 120^\circ}{AE}.$$

Поэтому $CE = \sqrt{3}CD$. Значит, треугольник DEC прямоугольный ($\angle ACE - \angle ACD = 90^\circ$), с углами 30° и 60° .

Высота CH треугольника ABC является также и высотой треугольника CDE , поэтому

$$CH = CE \cdot \sin 30^\circ = DE \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом площадь $S = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$.

2. При каком наибольшем действительном x найдется y , такой, что справедливы равенства

$$x^2 + xy + 2x + y = 3, \quad xy + y^2 + 3x + y = 6.$$

Ответ. $x = 3$.

Решение. *Первое решение.* Пусть пара $(x; y)$ удовлетворяет обоим равенствам. Вычитая из удвоенного первого второе, получим

$$2x^2 + xy - y^2 + x + y = 0,$$

Но

$$2x^2 + xy - y^2 + x + y = (2x - y)(x + y) + (x + y) = (2x - y + 1)(x + y),$$

Значит, либо $y = 2x + 1$, либо $y = -x$.

В первом случае, из первого равенства, получаем

$$x^2 + x(2x + 1) + 2x + (2x + 1) = 3,$$

т.е. уравнение $3x^2 + 5x - 2 = 0$, которое имеет корни $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

Во втором случае, подставляя $y = -x$ в первое равенство, получаем $x = 3$.

Значит, наибольшее подходящее значение $x = 3$.

Второе решение. Рассмотрим второе равенство как квадратное уравнение относительно y

$$y^2 + (x + 1)y + 3x - 6 = 0.$$

Его дискриминант $D = (x + 1)^2 - 4(3x - 6) = x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$. Откуда получаем два случая $y = \frac{-(x + 1) + (x - 5)}{2} = -3$ либо $y = \frac{-(x + 1) - (x - 5)}{2} = 2 - x$.

Подставляя найденный y в первое уравнение получаем, в первом случае $x^2 - x - 6 = 0$, т.е. $x = -2$ или $x = 3$. А, во втором случае

$$x^2 + x(2 - x) + 2x + (2 - x) = 3,$$

т.е. $x = \frac{1}{3}$.

Значит наибольшее значение $x = 3$.

3. Натуральное число N оканчивается цифрой a и является квадратом натурального числа. Также точным квадратом является число, получаемое из N приписыванием справа цифры a . Найдите число a и минимальное значение N .

Ответ. $a = 4$; $N = 144$.

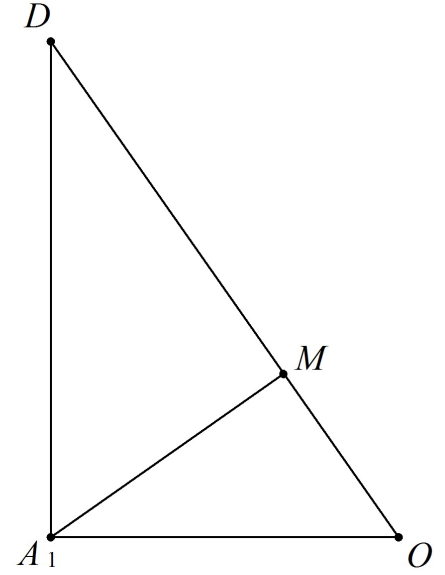
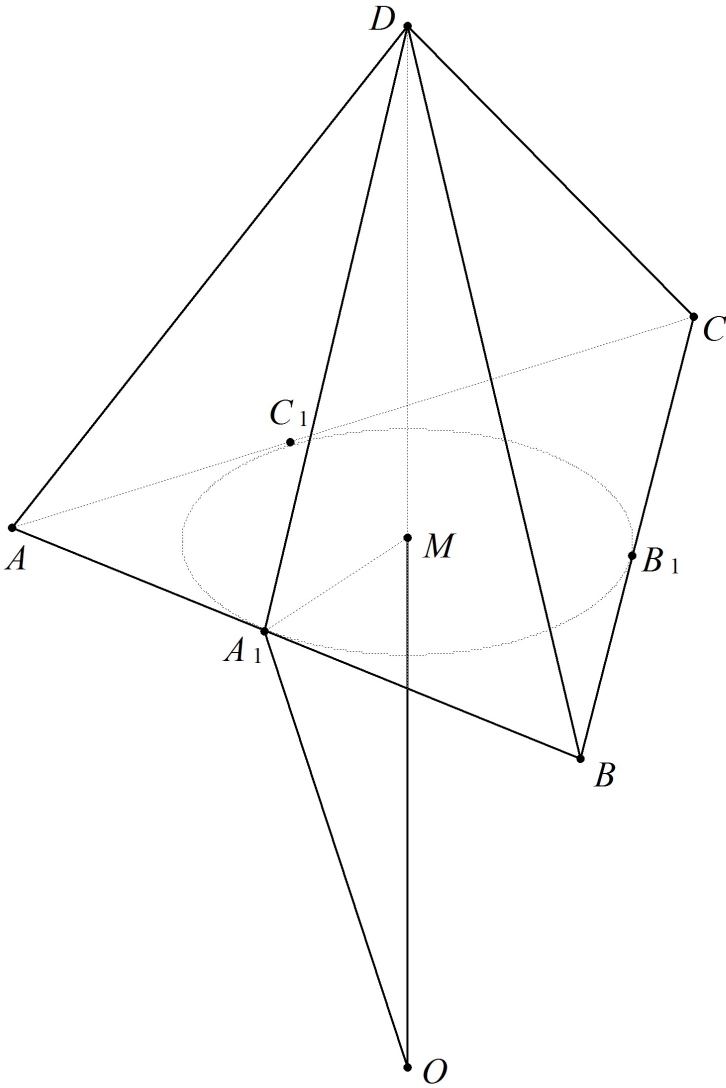
Решение. Т.к. N является квадратом натурального числа, то оно может оканчиваться лишь цифрами 0, 1, 4, 5, 6 или 9. А это значит, что \overline{Na} оканчивается 00, 11, 44, 55, 66 или 99. Но квадрат при делении на четыре может давать остатки 0 или 1, поэтому остаются лишь два варианта – 00 и 44. Первый из них отпадает, т.к. квадрат должен заканчиваться на четное количество нулей, а \overline{Na} имел бы на конце на один нуль больше, чем N , значит в одном из них было бы нечетное число нулей.

Остается единственный случай $a = 4$. И т.к. 44 и 644 не квадраты, то минимальное N равно 144 ($1444 = 38^2$).

4. В основании треугольной пирамиды лежит треугольник со сторонами 7, 8, 9. Высота, опущенная на это основание, равна 5. Сфера касается плоскостей всех боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах ее основания. Найдите квадрат радиуса этой сферы.

Ответ. $R^2 = 6$.

Решение. Пусть A_1, B_1, C_1 – точки касания сферы с боковыми гранями пирамиды, лежащие на сторонах AB, BC, CA соответственно. Тогда они являются точками касания вписанной окружности ω в треугольник основания. Пусть O – центр данной сферы, тогда треугольники A_1OD, B_1OD и C_1OD равны, как прямоугольные с общей гипотенузой и равными катетами OA_1, OB_1 и OC_1 (т.к. каждый из них является радиусом сферы). Поэтому $A_1D = B_1D = C_1D$.



Пусть DM – высота пирамиды. Тогда прямоугольные треугольники A_1DM , B_1DM и C_1DM равны по общему катету и равным гипотенузам. Поэтому $A_1M = B_1M = C_1M$, т.е. M является центром окружности ω . Аналогично, перпендикуляр из точки O на плоскость ABC попадает в точку M .

Рассмотрим прямоугольный треугольник A_1OD . В нем A_1M является высотой, поэтому треугольники OMA_1 и A_1MD подобны. Откуда $\frac{A_1O}{DA_1} = \frac{A_1M}{DM}$. Пусть $OA_1 = R$, $MA_1 = r$, $DA_1 = h$,

тогда $R = \frac{rh}{5}$.

Площадь треугольника ABC с одной стороны можно вычислить по формуле Герона

$$S = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 12\sqrt{5},$$

а с другой стороны, по формуле $S = pr$, где p – полупериметр треугольника ABC . Значит $r = \frac{S}{p} = \sqrt{5}$.

Далее, DA_1 найдем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника A_1DM

$$h = A_1D = \sqrt{25 + 5} = \sqrt{30}.$$

Поэтому $R = \frac{rh}{5} = \sqrt{6}$.

5. Сколько существует различных способов выбрать из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 несколько (хотя бы три) так, чтобы среди выбранных не было трех подряд идущих чисел?

Ответ. 228.

Решение. Обозначим через x_n количество всевозможных (возможно состоящих менее, чем из трех элементов) подмножеств набора 1, 2, ..., n , не содержащих трех последовательных чисел. Заметим, что для последовательности x_n справедлива следующая рекуррентная формула:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}.$$

Действительно, каждая подходящая выборка из n элементов либо не содержит число n (таких подмножеств x_{n-1}), либо содержит n , но не содержит $n-1$ (таких — x_{n-2}), либо содержит и n , и $n-1$ (и таких подмножеств x_{n-3} , т.к. элемент $n-2$ выбирать уже нельзя).

Для маленьких n легко вычислить x_n : $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 7$. А далее по формуле:

$$x_4 = 7 + 4 + 2 = 13, x_5 = 13 + 7 + 4 = 24, x_6 = 24 + 13 + 7 = 44, x_7 = 44 + 24 + 13 = 81, x_8 = 81 + 44 + 24 = 149, x_9 = 149 + 81 + 44 = 274.$$

Осталось лишь заметить, что в x_9 подсчитаны лишние нуль-элементные подмножества (одно), одноэлементные (девять) и двухэлементные ($\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ штук). В итоге получаем ответ:

$$274 - 1 - 9 - 36 = 228.$$