Интернет-олимпиада МФТИ
при поддержке компании Яндекс
2010 год

Второй тур

1. Дана последовательность 7, 14, 17, …, каждый следующий член которой равен сумме цифр квадрата предыдущего числа, увеличенной на один. Какое число стоит на 2010-том месте?

   Ответ. 8.

   Решение. Вычислим первые несколько членов последовательности:

   $$7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, \ldots,$$

   т.к. пятерка повторилась, значит далее элементы последовательности будут повторяться с периодом три. Поэтому восьмерка будет стоять на шестом, девятом, 12-ом, …, 2010-ом местах.

2. Правильная треугольная пирамида и правильная треугольная призма расположены так, что стороны одного из оснований призмы являются средними линиями основания пирамиды, а стороны другого основания пересекают боковые ребра пирамиды. Найдите отношение объема призмы к объему пирамиды.

   Ответ. 0,5625.

   Решение. Пусть площадь основания пирамиды равна S, а длина высоты – H. Тогда легко понять, что площадь основания призмы будет $s = \dfrac{S}{4}$, а ее высота – $h = \dfrac{3}{4}H$. Поэтому отношение объемов

   $$\frac{v}{V} = \frac{sh}{\frac{1}{3}SH} = \frac{9}{16}.$$

3. Имеется несколько кубиков одинакового размера. Каждая грань каждого из кубиков окрашена в черный или белый цвет. Два кубика считаются различными, если как ни крути их нельзя перепутать. Какое наибольшее количество различных кубиков может быть в наборе?

   Ответ. 10.

   Решение. Посчитаем сколько существует различных кубиков. Для этого разобьем все кубики на семь типов в зависимости от количества черных и белых граней:

черные	белые	количество
0	6	1
1	5	1
2	4	2 (либо противоположные, либо соседние)
3	3	2 (либо у одной вершины, либо буквой П)
4	2	2 (либо противоположные, либо соседние)
5	1	1
6	0	1

   Итого десять различных кубиков.

4. Три окружности, радиусы которых 15, 15 и 24, попарно касаются друг друга внешним образом, и изнутри касаются четвертой окружности. Найдите радиус этой окружности.

   Ответ. $R = 40$.

   Решение. Пусть O_1, O_2, O_3, O – центры исходных окружностей. Тогда $OO_1 = OO_2 = R - 15$, $OO_3 = R - 24$, где R – искомый радиус. Ясно, что точка O лежит на высоте O_3H треугольника $O_1O_2O_3$. По теореме Пифагора для треугольника O_1O_3H

$$O_3H = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36.$$

   Запишем теперь теорему Пифагора для треугольника O_1OH

$$(R - 15)^2 = 15^2 + (60 - R)^2,$$

   откуда $90R = 3600$, или $R = 40$.

5. Найдите наибольшее значение x при котором имеет место равенство

$$x^4 + 4x^3 = 8x - 4.$$

   (Ответ представьте в виде $a + \sqrt{b}$)

   Ответ. $a = -1$; $b = 3$

   Решение. Перенесем все в левую часть равенства

$$x^4 + 4x^3 - 8x + 4 = 0.$$

   Заметим, что если добавить и вычесть $4x^2$, то выражение можно будет легко разложить на множители

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4x^2 - 8x + 4 = (x^2 + 2x)^2 - 2 \cdot 2(x^2 + 2) + 2^2 = (x^2 + 2x - 2)^2.$$

   Таким образом корнями исходного уравнения являются $-1 \pm \sqrt{3}$. А, значит, наибольший равен $-1 + \sqrt{3}$.