Интернет-олимпиада МФТИ
при поддержке компании Яндекс
2010 год

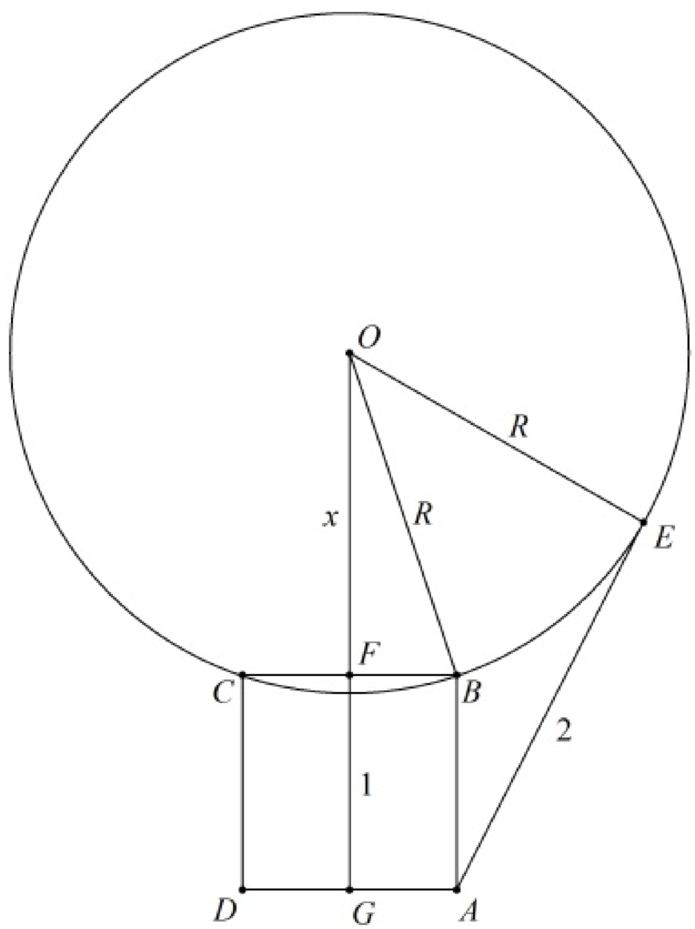
Третий тур

1. Сторона квадрата имеет длину 1, и является хордой некоторой окружности. Причем остальные стороны лежат вне нее. Длина касательной проведенной из вершины квадрата к той же окружности равна 2. Найдите квадрат длины ее радиуса.

   Ответ. $R^2 = 2,5$.

   Решение. Запишем терему Пифагора для треугольников OFB, OGA и OEA:

$$x^2 + \frac{1}{4} = R^2, \qquad (x+1)^2 + \frac{1}{4} = OA^2 = R^2 + 4.$$



Откуда имеем $x^2 + \frac{1}{4} = (x+1)^2 + \frac{1}{4} - 4$. Т.е. $2x = 3$. В итоге получаем, что

$$R^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = 2,5.$$

2. Найдите произведение всех ненулевых решений уравнения

$$\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49}=\frac{49}{x-50}+\frac{50}{x-49}.$$

Ответ. 4901.

Решение. Обозначим $a=\dfrac{x-49}{50}$, $b=\dfrac{x-50}{49}$. Тогда уравнение примет вид

$$a+b=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Домножив обе части на ab, перенеся все слагаемые в одну часть и разложив на множители, получим

$$(a+b)(ab-1)=0,$$

откуда следует, что либо $a+b=0$, либо $ab=1$. Подставляя выражения для a и b, получаем в первом случае $x=\dfrac{4901}{99}$, а во втором случае $x=99$.

3. В шахматном турнире участвовало 12 человек. После окончания турнира каждый участник составил 12 списков. В первый список входит только он сам, во второй – он и те, у кого он выиграл, в третий – все люди из второго списка и те, у кого они выиграли, и т.д. В 12 список входят все люди из одиннадцатого списка и те, у кого они выиграли. Известно, что для любого участника турнира в его двенадцатый список попал человек, которого не было в его одиннадцатом списке. Сколько ничейных партий было сыграно в турнире?

Ответ. 54.

Решение. Если $(k+1)$-й список такой же, как k-й, то списки с номерами $k+2$, ..., 11, 12 тоже будут точно такими же. Но по условию 11-й список и 12-й разные. Следовательно, у каждого участника k-й список содержит ровно k человек. В частности, 2-й список содержит ровно двух человек. Это означает, что каждый участник выиграл ровно одну партию. Поэтому число ничьих равно $\dfrac{12\cdot 11}{2}-12=54$.

4. Внутри выпуклого десятиугольника отмечено 1001 точка. Десятиугольники разрезан на треугольники, вершинами которых являются либо вершины десятиугольника, либо отмеченные точки. Сколько получилось треугольников?

Ответ. 2010.

Решение. Пусть получилось N треугольников. Тогда сумма углов всех треугольников равна $N\cdot 180^\circ$. С другой стороны сумма углов всех треугольников складывается из суммы углов десятиугольника и 1001 раз по 360° – суммы углов при каждой из точек. Итого получается

$$8\cdot 180^\circ+1001\cdot 360^\circ=2010\cdot 180^\circ.$$

Значит $N=2010$.

5. Найдите при каком натуральном n выражение $\dfrac{n^2}{1,001^n}$ принимает наибольшее значение.

Ответ. $n=2001$.

Решение. Обозначим $a_n = \dfrac{n^2}{1,001^n}$. Найдем отношение соседних членов последовательности:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1,001^n \cdot (n+1)^2}{1,001^{n+1} \cdot n^2} = \frac{1000}{1001} \cdot \frac{n^2+2n+1}{n^2}.$$

Сравним это отношение с единицей:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1000(n^2+2n+1) > 1001n^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2000n + 1000 > n^2$$

Т.е. $n(n-2000) < 1000$. Что, очевидно, выполняется при $n \leqslant 2000$, и не имеет места при остальных n.

Это означает, что

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{2000} < a_{2001} > a_{2002} > a_{2003} > \ldots$$

Поэтому наибольшее значение a_n при $n = 2001$.