

Интернет-олимпиада МФТИ при поддержке компании Яндекс 2010 год

Третий тур

1. Сторона квадрата имеет длину 1, и является хордой некоторой окружности. Причем остальные стороны лежат вне нее. Длина касательной проведенной из вершины квадрата к той же окружности равна 2. Найдите квадрат длины ее радиуса.
2. Найдите произведение всех ненулевых решений уравнения

$$\frac{x - 49}{50} + \frac{x - 50}{49} = \frac{49}{x - 50} + \frac{50}{x - 49}.$$

3. В шахматном турнире участвовало 12 человек. После окончания турнира каждый участник составил 12 списков. В первый список входит только он сам, во второй – он и те, у кого он выиграл, в третий – все люди из второго списка и те, у кого они выиграли, и т.д. В 12 список входят все люди из одиннадцатого списка и те, у кого они выиграли. Известно, что для любого участника турнира в его двенадцатый список попал человек, которого не было в его одиннадцатом списке. Сколько ничейных партий было сыграно в турнире?
4. Внутри выпуклого десятиугольника отмечено 1001 точка. Десятиугольник разрезан на треугольники, вершинами которых являются либо вершины десятиугольника, либо отмеченные точки. Сколько получилось треугольников?
5. Найдите при каком натуральном n выражение $\frac{n^2}{1,001^n}$ принимает наибольшее значение.